Московский Физико-Технический Институт (национальный исследовательский университет)

Межвузовский центр воспитания и развития талантливой молодежи в области естественно-математических наук «Физтех-центр»

62-я выездная физико-математическая олимпиада МФТИ

Решения задач

Москва 2023

Выездная физико-математическая олимпиада МФТИ 2022-2023 уч. года
Физика
Задания, решения, критерии оценивания

Общие указания по проведению

Время для решения заданий по физике каждого класса — 2 часа.

Черновики не проверяются.

В вариант включаются 4 задачи из 5. Допустимые наборы задач указаны в заголовке для каждого класса по отдельности.

Каждая задача включается в вариант с одним из двух вариантов числовых данных.

Каждая задача по физике оценивается целым числом баллов от 0 до 10.

Максимальное число баллов за олимпиаду 40.

Общие принципы выставления оценки по математике:

- правильное решение — 10 баллов;
- решение с недочетами — 7-9 баллов;
- решение с пропущенными важными частями — 3-5 баллов;

Во всех задачах, если это не оговорено специально, только верный ответ без обоснований стоит 0 баллов.

Во время написания олимпиады допускается использование непрограммируемого калькулятора. Использование прочих электронно-вычислительных средств не допускается.

В вариант включается одна из двух задач Ф9.3 и Ф9.5.

Ф9.1-1 Две параллельные стены расположены на расстоянии $L = 1$ м друг от друга. От левой стены бросают упругий мяч под углом $\alpha = 30°$ к горизонту с начальной скоростью $v_0 = 10$ м/с в сторону правой стены. Через какое время и на каком расстоянии от левой стены мяч упадёт на землю?

Ф9.1-2 Две параллельные стены расположены на расстоянии $L = 0{,}3$ м друг от друга. От левой стены бросают упругий мяч под углом $\alpha = 30°$ к горизонту с начальной скоростью $v_0 = 5$ м/с в сторону правой стены. Через какое время и на каком расстоянии от левой стены мяч упадёт на землю?

Ответ. Вариант 1: $l = 0{,}66$ м; вариант 2: $l = 0{,}235$ м.

Решение варианта 1. При каждом упругом ударе мяча о стену его траектория зеркально отражается относительно неё. Следовательно, движение шарика можно рассматривать как движение под углом к горизонту. Время в полёте будет равно $T = \dfrac{2v_0 \sin\alpha}{g} = 1$ с.

Если бы мяч не испытывал ударов о стену, за всё время полёта по горизонтали он переместился бы на расстояние $L = \dfrac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g} = 8{,}66$ м. (это дальность полёта тела, брошенного под углом к горизонту при аналогичных условиях). Получаем, что всего произойдет 8 отражений от стены, а расстояние от левой стены до точки падения равно $l = |8{,}66 - 1 \cdot 9| = 0{,}34$ м.

Ф9.2-1 Тело находится на наклонной плоскости, расположенной под углом $\theta = 30°$ к горизонту. Коэффициент трения о поверхность равен $\mu = 0{,}1$. Какую минимальную силу в единицах силы тяжести нужно приложить, чтобы тело находилось в покое?

Ф9.2-2 Тело находится на наклонной плоскости, расположенной под углом $\theta = 45°$ к горизонту. Коэффициент трения о поверхность равен $\mu = 0{,}3$. Какую минимальную силу в единицах силы тяжести нужно приложить, чтобы тело находилось в покое?

Решение. Выберем ось Ox сонаправленной с силой трения (вдоль наклонной плоскости), а ось Oy перпендикулярно наклонной плоскости. Запишем условие равновесия в проекциях на выбранные оси:

$$\begin{cases} \mu N - mg\sin\theta + F_x = 0, \\ N - F_y - mg\cos\theta = 0 \end{cases}$$

Выразим N из второго уравнения и подставим в первое: $\mu F_y + F_x + mg(\mu\cos\theta - \sin\theta) = 0$. Обозначим искомую величину F/mg через f, а выражение $\sin\theta - \mu\cos\theta$ через η. Тогда известно, что $\mu f_y + f_x = \eta$, а требуется найти минимум выражения $f^2 = f_x^2 + f_y^2$.

После подстановки f_x получим

$$f^2 = f_y^2(1 + \mu^2) - 2\eta\mu f_y + \eta^2.$$

Известно, что графиком такой функции от переменной f_y является парабола с ветвями, направленными вверх. Поэтому минимальное значение равно

$$f = \sqrt{\frac{4(1+\mu^2)\eta^2 - 4\eta^2\mu^2}{4(1-\mu^2)}} = \eta\sqrt{\frac{1}{1-\mu^2}}.$$

Ответ. Вариант 1: $f = 0{,}416$, вариант 2: $f = 0{,}519$.

Ф9.3-1 Школьница Глафира набрала снег, чтобы заварить себе чай. Она наполнила чайник снегом, и получившаяся вода вскипела за $t_1 = 4$ минуты. При этом Глафира заметила, что до включения чайника снег уже начал таять. Определите плотность снега, если такой же объем воды комнатной температуры $T = 20^\circ$ закипает за $t_0 = 3$ минуты. Удельная теплоёмкость воды равна $c_{\text{вод.}} = 4200$, удельная теплота плавления льда $\lambda = 333{,}5$ кДж/кг, плотность воды $\rho_{\text{вод.}}$

Ф9.3-2 Школьница Глафира набрала снег, чтобы заварить себе чай. Она наполнила чайник снегом, и получившаяся вода вскипела за $t_1 = 5$ минут. При этом Глафира заметила, что до включения чайника снег уже начал таять. Определите плотность снега, если такой же объем воды комнатной температуры $T = 25^\circ$ закипает за $t_0 = 4$ минуты. Удельная теплоёмкость воды равна $c_{\text{вод.}} = 4200$, удельная теплота плавления льда $\lambda = 333{,}5$ кДж/кг, плотность воды $\rho_{\text{вод.}}$

Ответ. Вариант 1: $\rho_{\text{сн.}} = 590$ кг/м^3; вариант 2: $\rho_{\text{сн.}} = 529$ кг/м^3.

Решение. Запишем уравнение теплового баланса для воды и для снега:

$$\begin{cases} C_{\text{в.}} m_{\text{в.}} (T_{\text{кип.}} - T) = N t_0, \\ C_{\text{в.}} m_{\text{сн.}} (T_{\text{кип.}} - T_0) + \lambda m_{\text{сн.}} = N t_1, \end{cases}$$

где N — мощность чайника, которую считаем одной и той же, а $T_0 = 0^\circ$ — температура снега в момент таяния. Выразим мощность из обоих уравнений и приравняем, а также учтём, что $m = \rho V$:

$$\rho_{\text{сн.}} \frac{C_{\text{в.}}(T_{\text{кип.}} - T_0) + \lambda}{t_1} = \rho_{\text{в.}} \frac{C_{\text{в.}}(T_{\text{кип.}} - T)}{t_0}$$

Отсюда $\rho_{\text{сн.}} = \rho_{\text{в.}} \dfrac{C_{\text{в.}}(T_{\text{кип.}} - T) t_1}{t_0 (C_{\text{в.}}(T_{\text{кип.}} - T_0) + \lambda)}$.

Ф9.4-1 Проволочный куб имеет сопротивление $R = 10$ Ом между парой вершин на любой из главных диагоналей (содержащих центр куба). Как изменится это сопротивление, если отрезками такой же проволоки провести все главные диагонали куба?

Ф9.4-2 Проволочный куб имеет сопротивление $R = 20$ Ом между парой вершин на любой из главных диагоналей (содержащих центр куба). Как изменится это сопротивление, если отрезками такой же проволоки провести все главные диагонали куба?

Решение варианта 1. Для определения сопротивления соединим эквипотенциальные точки, лежащие в плоскостях, перпендикулярных оси симметрии. Для куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$, подключенного вершинами A и C_1, это тройки вершин B, D, A_1 и B_1, D_1, C. Поэтому куб без диагоналей эквивалентен последовательному соединению групп из трёх, шести и еще раз трёх ребер, соединенных параллельно. Сопротивление такой схемы $R = \frac{1}{3}R_0 + \frac{1}{6}R_0 + \frac{1}{3}R_0 = \frac{5}{6}R_0$, где R_0 — сопротивление одного ребра куба. Диагонали BD_1, DB_1 и A_1C будут иметь сопротивление $\sqrt{3}R_0$ и подключены параллельно шестерке ребер. Диагональ AC_1 будет подключена параллельно всей схеме. Таким образом сопротивление куба вместе с добавленными диагоналями

$$R_1 = \cfrac{1}{\cfrac{1}{\sqrt{3}R_0} + \cfrac{1}{\cfrac{R_0}{3} + \cfrac{1}{\cfrac{6}{R_0} + \cfrac{\sqrt{3}}{R_0}} + \cfrac{R_0}{3}}} \approx 0{,}65R.$$

Ответ. Вариант 1: $R_1 \approx 6{,}5$ Ом; вариант 2: $R_1 \approx 13$ Ом.

Ф9.5-1 Мальчик Витя отправился в поход на лыжах и устроил привал. Поскольку температура на улице $T_0 = -10^\circ C$, он взял с собой в палатку аккумулятор с ЭДС $\mathscr{E} = 60$ В и внутренним сопротивлением $r = 4$ Ом, а также два нагревательных элемента с сопротивлениями $R = 8$ Ом. Для начала Витя подключил один элемент к аккумулятору и заметил, что температура выросла до $T_1 = 4^\circ C$. После этого он включил два элемента последовательно, и температура снизилась до $T_{\text{посл}} = 0°C$. Какая температура установится в палатке, если Витя включит два элемента параллельно? Тепло, выделяемое самим Витей, можно считать не зависящим от температуры в палатке.

Ф9.5-2 Мальчик Витя отправился в поход на лыжах и устроил привал. Поскольку температура на улице $T_0 = -15°C$, он взял с собой в палатку аккумулятор с ЭДС $\mathscr{E} = 120$ В и внутренним сопротивлением $r = 8$ Ом, а также два нагревательных элемента с сопротивлениями $R = 16$ Ом. Для начала Витя подключил один элемент к аккумулятору и заметил, что температура выросла до $T_1 = 9°C$. После этого он включил два элемента последовательно, и температура снизилась до $T_{\text{посл}} = 1°C$. Какая температура установится в палатке, если Витя включит два элемента параллельно? Тепло, выделяемое самим Витей, можно считать не зависящим от температуры в палатке.

Ответ. Вариант 1: $T_{\text{пар}} = 9°C$; вариант 2: $T_{\text{пар}} = 19°C$.

Решение варианта 1. Мощность, выделяемая в цепи при подключении к аккумулятору одного нагревательного элемента, равна $P_1 = \dfrac{\mathscr{E}^2}{r+R} = 300$ Вт. При подключении двух элементов последовательно она равна $P_{\text{посл}} = \dfrac{\mathscr{E}^2}{r+2R} = 180$ Вт, а при подключении двух элементов параллельно — уже $P_{\text{пар}} = \dfrac{\mathscr{E}^2}{r+\dfrac{R}{2}} = 450$ Вт. В стационарном режиме разность температур между окружающей средой и воздухом внутри палатки прямо пропорциональна мощности, выделяющейся внутри. Поэтому в случае, когда Витя выделяет тепло с мощностью P_B,

$$\frac{P_B + P_1}{T_1 - T_0} = \frac{P_B + P_{\text{посл}}}{T_{\text{посл}} - T_0} = \frac{P_B + P_{\text{пар}}}{T_{\text{пар}} - T_0}.$$

Из этого получаем $P_B = 120$ Вт и $T_{\text{пар}} = 9°C$.

В вариант включается одна из двух задач Ф10.4 и Ф10.5

Ф10.1-1 В вертикальном цилиндрическом теплоизолированном сосуде под поршнем массы M находится смесь двух газов — гелия и водорода. В некоторый момент на поршень ставят груз массой $3M$. После установления равновесия оказывается, что объем газов в сосуде уменьшился в 2 раза. Найдите отношение массы водорода к массе гелия.

Ф10.1-2 В вертикальном цилиндрическом теплоизолированном сосуде под поршнем массы M находится смесь двух газов — гелия и водорода. В некоторый момент на поршень ставят груз массой $19M$. После установления равновесия оказывается, что объем газов в сосуде уменьшился в $\dfrac{20}{7}$ раз. Найдите отношение массы водорода к массе гелия.

Ответ. Вариант 1: $\dfrac{m_{H_2}}{m_{He}} = \dfrac{1}{2}$; вариант 2: $\dfrac{m_{H_2}}{m_{He}} = 1$.

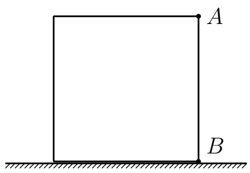
Решение варианта 1. В процессе установления равновесия изменение потенциальной энергии груза и поршня равно $Q = (M + 3M)g\left(V_0 - \dfrac{V_0}{2}\right)/S$.

С другой стороны, так как сосуд теплоизолирован, внутренняя энергия газов изменилась на ту же величину $Q = (\nu_{He}c_{v_{He}} + \nu_{H_2}c_{v_{H_2}})(T_1 - T_0)$.

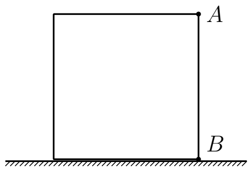
Выразим разность температур через уравнение Менделеева-Клапейрона $T_1 - T_0 = \dfrac{P_1V_1 - P_0V_0}{(\nu_{He} + \nu_{H_2})R}$.

Зная, что $P_1 = 4P_0 = \dfrac{4Mg}{S}$, а $V_1 = \dfrac{V_0}{2}$, получим $\overline{c_v} = \dfrac{\nu_{He}c_{v_{He}} + \nu_{H_2}c_{v_{H_2}}}{\nu_{He} + \nu_{H_2}} = 2R$. Удельные теплоемкости при постоянном объеме гелия и водорода равны $c_{v_{He}} = \dfrac{3}{2}R; c_{v_{H_2}} = \dfrac{5}{2}R$, поэтому $\nu_{He} = \nu_{H_2}$. Следовательно, $\dfrac{m_{H_2}}{m_{He}} = \dfrac{\mu_{H_2}}{\mu_{He}} = \dfrac{1}{2}$.

Ф10.2-1 Однородный куб массы $m = 50$ кг стоит на шероховатой поверхности. Коэффициент трения $\mu = 0{,}2$. Экспериментатор хочет перевернуть куб через ребро B, прикладывая силу к точке A так, чтобы он не скользил по поверхности. Какую наименьшую силу он должен приложить?



Ф10.2-2 Однородный куб массы $m = 100$ кг стоит на шероховатой поверхности. Коэффициент трения $\mu = 0{,}3$. Экспериментатор хочет перевернуть куб через ребро B, прикладывая силу к точке A так, чтобы он не скользил по поверхности. Какую наименьшую силу он должен приложить?



Ответ. Вариант 1: $F \approx 0{,}79$ кН; вариант 2: $F \approx 0{,}83$ кН.

Решение варианта 1. На куб действуют 4 силы: сила тяжести mg, сила реакции опоры N, сила трения $F_{\text{тр}}$ и сила F, приложенная экспериментатором. Запишем второй закон Ньютона в проекциях на горизонтальную и вертикальную оси:

$$\begin{cases} N = mg + F_y, \\ F_{\text{тр}} = F_x. \end{cases}$$

Запишем уравнение моментов относительно оси B: $F_xa = mga/2$. Так как

$$\frac{mg}{2} = F_{\text{тр}} \le \mu N = \mu(mg + F_y),$$

$F_y \geq \dfrac{mg}{2\mu} - mg$. Следовательно, $F = \sqrt{{F_x}^2 + {F_y}^2} \geq 1{,}58 \cdot mg = 0{,}79$ кН.

Ф10.3-1 При погружении в тёплых водах аквалангист использует баллоны со сжатым воздухом объемом $V = 10$ л и начальным давлением $P_б = 200$ атм. Оцените время, на которое хватит одного баллона при работе на глубине $H = 40$ м. Считайте, что дыхательный объем $V_0 = 0{,}5$ л, а частота дыхания $f = 30$ вдохов в минуту.

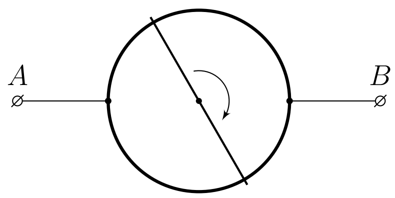
Ф10.3-2 При погружении в тёплых водах аквалангист использует баллоны со сжатым воздухом объемом $V = 20$ л и начальным давлением $P_б = 150$ атм. Оцените время, на которое хватит одного баллона при работе на глубине $H = 90$ м. Считайте, что дыхательный объем $V_0 = 0{,}5$ л, а частота дыхания $f = 30$ вдохов в минуту.

Ответ. Вариант 1: $t \approx 27$ мин; вариант 2: $t \approx 20$ мин.

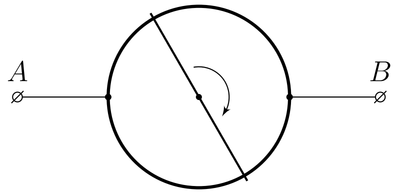
Решение варианта 1. Давление внутри легких аквалангиста примерно равно давлению окружающей среды $P = P_0 + \rho g H = 5$ атм. При таком рабочем давлении газ, заключенный в баллоне, занимает объём $V_{эфф.} = V \cdot \dfrac{P_б}{P} = 400$ л. Соответственно, воздух закончится через $t = \dfrac{V_{эфф.}}{V_0 f} \approx 27$ мин.

Комментарий. Решения с учетом ненулевого конечного давления в баллоне также следует считать правильными. Ответы должны отличаться не более, чем на 10%.

Ф10.4-1 Переменный резистор состоит из кольца и прямолинейного отрезка проволоки, как показано на рисунке. Кусок проволоки может вращаться вокруг центра кольца и всегда соединяет две диаметрально противоположные точки. Обе части сделаны из одного материала, но поперечное сечение проволоки кольца в $\dfrac{\pi}{2}$ раз больше. Найдите максимальное сопротивление элемента R_{AB}, если минимальное равно $R_{min} = 10$ Ом.



Ф10.4-2 Переменный резистор состоит из кольца и прямолинейного отрезка проволоки, как показано на рисунке. Кусок проволоки может вращаться вокруг центра кольца и всегда соединяет две диаметрально противоположные точки. Обе части сделаны из одного материала, но поперечное сечение проволоки кольца в $\dfrac{\pi}{2}$ раз больше. Найдите максимальное сопротивление элемента R_{AB}, если минимальное равно $R_{min} = 20$ Ом.



Ответ. Вариант 1: $R_{max} = 15$ Ом; вариант 2: $R_{max} = 30$ Ом.

Решение. Пусть отрезок проволоки соединяется с кольцом в точках C и D, сопротивление отрезка проволоки $R_{CD} = R$, а напряжение $U_{AB} = U$. Сопротивление проводника пропорционально длине проводника и обратно пропорционально поперечному сечению, поэтому $R_{AC} + R_{CB} = R$. Запишем законы Кирхгофа для полукольца ACB, контура ACD и узла :

$$\begin{cases} I_{AC}R_{AC} + I_{CB}R_{CB} = U, \\ I_{AC}R_{AC} + I_{CD}R_{CD} = I_{AD}R_{AD}, \\ I_{AC} = I_{CD} + I_{CB}. \end{cases}$$

Из симметрии схемы $I_{CB} = I_{AD}$. Общий ток через элемент $I_{AB} = I_{AC} + I_{AD} = \dfrac{U}{R_{эфф.}}$. Из полученной системы уравнений находим

$$R_{эфф.} = \frac{1 + 2\left(\dfrac{R_{AC}}{R}\right) - 2\left(\dfrac{R_{AC}}{R}\right)^2}{3} R.$$

Максимальное значение $R_{max} = \dfrac{R}{2}$ достигается при $R_{AC} = \dfrac{R}{2}$, а минимальное $R_{min} = \dfrac{R}{3}$ — при $R_{AC} = 0$.

Ф10.5-1 Оптическая схема состоит из собирающей линзы и точечного источника, расположенного на её оптической оси. Расстояние между источником и линзой $d = 1{,}2$ м, фокусное расстояние линзы $F = 1$ м. В некоторый момент из-за повышения температуры показатель преломления линзы увеличился на $\delta n = 10^{-4}$. Найдите, на какое расстояние сдвинется изображение источника, если начальный показатель преломления материала линзы $n = 1{,}2$.

Ф10.5-2 Оптическая схема состоит из собирающей линзы и точечного источника, расположенного на её оптической оси. Расстояние между источником и линзой $d = 1{,}5$ м, фокусное расстояние линзы $F = 1$ м. В некоторый момент из-за повышения температуры показатель преломления линзы увеличился на $\delta n = 5 \cdot 10^{-4}$. Найдите, на какое расстояние сдвинется изображение источника, если начальный показатель преломления материала линзы $n = 1{,}5$.

Ответ. Вариант 1: $\Delta f \approx 1{,}8$ см; вариант 2: $\Delta f \approx 0{,}9$ см.

Решение варианта 1. Обозначим малое смещение изображения источника через Δf. Уравнение тонкой линзы до изменения температуры $\dfrac{1}{f} + \dfrac{1}{d} = \dfrac{1}{F_0} = D_0$, а после изменения температуры $\dfrac{1}{f - \Delta f} + \dfrac{1}{d} = \dfrac{1}{F_1} = D_1$. Вычитая эти выражения получим $\dfrac{1}{f - \Delta f} - \dfrac{1}{f} = D_1 - D_0$. Так как изменение показателя преломления и смещение изображения малы, $\dfrac{1}{f - \Delta f} - \dfrac{1}{f} \approx \dfrac{\Delta f}{f^2}$. Оптическая сила линзы пропорциональна разнице между показателем преломления материала линзы и показателем преломления среды $D \propto (n_{\text{мат}} - 1)$, поэтому $D_1 - D_0 = \left(\dfrac{n + \delta n - 1}{n - 1} - 1\right) D_0$.

Окончательно находим смещение изображения $\Delta f \approx \dfrac{\delta n}{n - 1} f^2 D_0 = 1{,}8$ см.

В варианте обязательно должны присутствовать задачи Ф11.2, Ф11.5, одна из задач Ф11.1 и Ф11.6 и одна из задач Ф11.3 и Ф11.4

Ф11.1-1 Мягкий джутовый мешочек соды скользит по гладкому полу со скоростью $v = 5$ м/с и соударяется с шероховатой плоскостью, коэффициент трения скольжения по которой равен $\mu = 0{,}1$, а угол наклона этой плоскости к горизонту $\theta = 45°$. На какую высоту поднимется мешочек?
Ф11.1-2 Мягкий джутовый мешочек соды скользит по гладкому полу со скоростью $v = 10$ м/с и соударяется с шероховатой плоскостью, коэффициент трения скольжения по которой равен $\mu = 0{,}4$, а угол наклона этой плоскости к горизонту $\theta = 45°$. На какую высоту поднимется мешочек?

Ответ. Вариант 1: $H = 46$ см; вариант 2: $H = 17$ см.

Решение. Рассмотрим удар мешочка о наклонную плоскость. В процессе соударения перпендикулярная плоскости компонента импульса p_y теряется полностью, а горизонтальная компонента p_x уменьшится из-за наличия трения. Изменение перпендикулярной компоненты импульса $\Delta p_y = p_t = \int N(t)dt$, где N — сила реакции опоры, а интегрирование ведётся по времени соударения. С другой стороны, изменение вертикальной компоненты импульса можно выразить как $\Delta p_x = \int F_{\text{тр.}} dt$, где изменение импульса создаётся импульсом силы трения. Согласно закону Амонтона-Кулона, $F_{\text{тр.}} = \mu N$. Тогда $\Delta p_x = \int \mu N dt = \mu p_y$.
Конечный импульс мешочка равен

$$p_{\text{кон.}} = p_x - \mu p_y = p\cos\theta - \mu p \sin\theta = mv(1-\mu)/\sqrt{2}.$$

Запишем закон сохранения энергии, пренебрегая перемещением мешочка за время столкновения:

$$\frac{p^2_{\text{кон.}}}{2m} = mgH + \mu mg\cos\theta H/\sin\theta = mgH + \mu mgH = (1+\mu)mgH.$$

Используя выражение для конечного импульса мешочка, получим $\dfrac{v^2(1-\mu)^2}{4} = (1+\mu)gH$. Высота подъема равна $H = \dfrac{v^2(1-\mu)^2}{4(1+\mu)g}$.

Ф11.2-1 В герметичном жёстком сосуде содержится горячий двухатомный газ температурой $T_0 = 1000$ K, молекулы которого могут распадаться на два атома из-за температуры. В начальный момент времени все молекулы были целыми. При увеличении температуры на $\Delta T \approx 10K$ доля распавшихся молекул составила $\alpha = 1\%$. Определите теплоёмкость газа на 1 моль в этом процессе, если энергией диссоциации молекул можно пренебречь.
Ф11.2-2 В герметичном жёстком сосуде содержится горячий двухатомный газ температурой $T_0 = 1000$ K, молекулы которого могут распадаться на два атома из-за температуры. В начальный момент времени все молекулы были целыми. При увеличении температуры на $\Delta T \approx 7K$ доля распавшихся молекул составила $\alpha = 0{,}7\%$. Определите теплоёмкость газа на 1 моль в этом процессе, если энергией диссоциации молекул можно пренебречь.

Ответ. Вариант 1: $C = 1{,}49R = 12{,}382$ Дж/К · моль; вариант 2: $C = 1{,}49R = 12{,}407$ Дж/К · моль.

Решение. Запишем теплоёмкость по определению: $C = \dfrac{1}{\nu}\dfrac{\Delta Q}{\Delta T}$. Из первого начала термодинамики $\Delta Q = \Delta U + \Delta A$. Поскольку сосуд герметичный и жесткий, $\Delta Q = \Delta U$. По определению внутренней энергии $U = \frac{i}{2}\nu RT$, где i — количество степеней свободы. Тогда, можно получить выражение для ΔU, учитывая что для двухатомной молекулы $i = 5$, а для одноатомной молекулы $i = 3$:

$$\Delta U = U_{fin} - U_{init} = \frac{5}{2}\nu(1-\alpha)R(T+\Delta T) + \frac{3}{2}\nu\alpha R(T+\Delta T) - \frac{5}{2}\nu RT$$

Окончательно находим

$$C = \frac{\left(\frac{5}{2}\nu(1-\alpha) + \frac{3}{2}\nu\alpha\right)R(T+\Delta T) - \frac{5}{2}\nu RT}{\nu\Delta T} = RT\frac{(5(1-\alpha)+3\alpha)\,(T+\Delta T)/T - 5}{2\Delta T}.$$

Ф11.3-1 Проволочный контур в форме окружности радиусом $R = 10$ см и сопротивлением на единицу длины $\rho = 0{,}017$ Ом/м находится в однородном переменном магнитном поле перпендикулярно силовым линиям. Магнитное поле изменяется по гармоническому закону $\vec{B} = \vec{B}_0\sin(\omega t)$, где $|\vec{B}_0| = 0{,}1$ Тл. С какой максимальной частотой может изменяться магнитное поле, чтобы проволочный контур оставался целым, если предел прочности проволоки на разрыв равен $T = 220$ Н? Самоиндукцией кольца можно пренебречь.

Ф11.3-2 Проволочный контур в форме окружности радиусом $R = 15$ см и сопротивлением на единицу длины $\rho = 0{,}028$ Ом/м находится в однородном переменном магнитном поле перпендикулярно силовым линиям. Магнитное поле изменяется по гармоническому закону $\vec{B} = \vec{B}_0\sin(\omega t)$, где $|\vec{B}_0| = 0{,}1$ Тл. С какой максимальной частотой может изменяться магнитное поле, чтобы проволочный контур оставался целым, если предел прочности проволоки на разрыв равен $T = 91$ Н? Самоиндукцией кольца можно пренебречь.

Ответ. Вариант 1: $\omega = 149{,}6$ кГц; вариант 2: $\omega = 45{,}3$ кГц.
Решение. Вследствие изменения потока в проволочном контуре возникнет электрический ток $I = \dfrac{\mathscr{E}_{\text{инд.}}}{2\pi R\rho}$. ЭДС индукции по закону Фарадея можно найти как $\mathscr{E}_{\text{инд.}} = \left|\dfrac{d\Phi}{dt}\right|$. Отсюда получаем зависимость тока от времени:

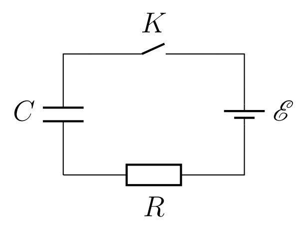
$$I(t) = \frac{\pi R^2 B_0\omega\cos\omega t}{2\pi R\rho} = \frac{RB_0\omega\cos\omega t}{2\rho}.$$

Поскольку самоиндукцией можно пренебречь, сила, действующая на малый элемент длины проводника Δl, равна $\Delta F = BI\Delta l$ и направлена по радиусу. С другой стороны, воспользовавшись теоремой косинусов и равенством $\cos\alpha \approx 1 - \alpha^2/2$ для малых углов, можно найти компенсирующую силу: $\Delta F_{\text{нат.}} = T_{\text{нат.}}\Delta l/R$. Отсюда сила натяжения проволоки кольца зависит от времени по следующему закону:

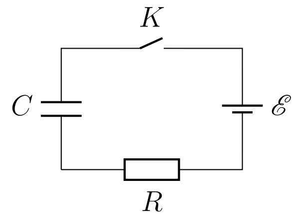
$$T_{\text{нат.}} = RBI = \frac{R^2B_0^2\omega\cos\omega t\sin\omega t}{2\rho} = \frac{R^2B_0^2\omega\sin 2\omega t}{4\rho}.$$

Максимальная сила натяжения $T = \dfrac{R^2B_0^2\omega}{4\rho}$. Следовательно, максимальная частота $\omega = \dfrac{4T\rho}{R^2B_0^2}$.

Ф11.4-1 В контуре из незаряженного конденсатора емкости $C = 5$ мкФ, резистора спротивлением $R = 400$ Ом, ключа и идеального источника ЭДС $\mathscr{E} = 2$ В замыкают ключ. Какая скорость изменения напряжения на конденсаторе будет в начальный момент времени?



Ф11.4-2 В контуре из незаряженного конденсатора емкости $C = 1$ мкФ, резистора спротивлением $R = 100$ Ом, ключа и идеального источника ЭДС $\mathscr{E} = 1$ В замыкают ключ. Какая скорость изменения напряжения на конденсаторе будет в начальный момент времени?



Ответ. Вариант 1: 10^3 В/с; вариант 2: 10^4 В/с.

Решение. В начальный момент времени напряжение на конденсаторе не изменяется скачкообразно, а значит, напряжение на резисторе равно $\mathscr{E}$. Ток через резистор равен $I = \mathscr{E}/R$ и совпадает с током через конденсатор. Используя выражение для заряда конденсатора $q = CU$, получим, что скорость изменения напряжения равна

$$\frac{\Delta U}{\Delta t} = \frac{1}{C}\frac{\Delta q}{\Delta t} = \frac{I}{C} = \frac{\mathscr{E}}{CR}.$$

Ф11.5-1 Изображение предмета в собирающей линзе наблюдается с увеличением $\Gamma = 1{,}1$. Экспериментатор поместил всю систему в жидкость и не смог получить изображение на экране. Найдите минимальный возможный показатель преломления жидкости, если показатель преломления стекла линзы $n_{\text{ст.}} = 1{,}4$ и воздуха $n_{\text{возд.}} = 1$.

Ф11.5-2 Изображение предмета в собирающей линзе наблюдается с увеличением $\Gamma = 1{,}3$. Экспериментатор поместил всю систему в жидкость и не смог получить изображение на экране. Найдите минимальный возможный показатель преломления жидкости, если показатель преломления стекла линзы $n_{\text{ст.}} = 1{,}5$ и воздуха $n_{\text{возд.}} = 1$.

Ответ. Вариант 1: $n_{\text{жид}} = 1{,}19$; вариант 2: $n_{\text{жид}} = 1{,}22$.

Решение. Используем выражение для увеличения $\Gamma = f/d$ и формулу тонкой линзы $\frac{1}{F} = \frac{1}{f} + \frac{1}{d}$: увеличение равно $\Gamma = F/(F - d)$. Согласно формуле шлифовщика $F \propto 1/(n_{\text{ст.}} - n_{\text{окр.}})$ фокусное расстояние системы в жидкости увеличится. Поскольку изображение перестало наблюдаться, оно стало мнимым. Требуется найти минимальный показатель преломления для возникновения подобного эффекта, поэтому фокусное расстояние линзы должно совпасть с расстоянием до предмета: $F' = d$. Используя выражение $\dfrac{F'}{F} = \dfrac{n_{\text{ст.}} - n_{\text{возд.}}}{n_{\text{ст.}} - n_{\text{жид.}}}$, получим, что

$$\Gamma = \frac{F}{F\left(\frac{n_{\text{ст.}} - n_{\text{возд.}}}{n_{\text{ст.}} - n_{\text{жид.}}} - 1\right)} = \left(\frac{(n_{\text{ст.}} - n_{\text{возд.}})}{(n_{\text{ст.}} - n_{\text{жид.}})} - 1\right)^{-1} = \frac{n_{\text{ст.}} - n_{\text{жид.}}}{n_{\text{жид.}} - n_{\text{возд.}}}.$$

Отсюда окончательно находим показатель преломления жидкости:

$$n_{\text{жид.}} = \frac{\Gamma \cdot n_{\text{возд.}} + n_{\text{ст.}}}{\Gamma + 1}$$

Ф11.6-1 Космонавт при изучении шарообразного астероида заметил, что отвес в виде тяжелого груза на нити располагается параллельно оси вращения астероида на широте $48°5'$. Определите период обращения астероида, если его плотность равна плотности Земли $\rho = 5510$ кг/м^3.

Ф11.6-2 Космонавт при изучении шарообразного астероида заметил, что отвес в виде тяжелого груза на нити располагается параллельно оси вращения астероида на широте $87°4'$. Определите период обращения астероида, если его плотность равна плотности Земли $\rho = 5510$ кг/м^3.

Ответ. $T = \sqrt{\dfrac{3\pi}{G\rho}} = 84{,}3$ мин. (для обоих вариантов).

Решение. Запишем второй закон Ньютона в проекции на ось, перпендикулярную нити:

$$ma_{\text{ц.}} = m\omega^2 R\cos\varphi = G\frac{Mm}{R^2}\cos\varphi,$$

где M — масса астероида, а φ — широта. Выразим отсюда частоту вращения:

$$\omega^2 = G\frac{4/3\pi R^3\rho}{R^3} = G\frac{4\pi\rho}{3}.$$

Окончательно находим искомый период: $T = \sqrt{\dfrac{3\pi}{G\rho}} = 84{,}3$ мин.

Межвузовский центр воспитания и развития талантливой молодежи в области естественно-математических наук «Физтех-Центр»